

الوحدة الثالثة

الملخص



إعداد الأستاذ

حسن ممدوح

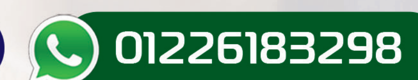
Scan me













الوحدة الثالثة

المصفوفات: المصفوفة المكونة من م صفاً، ن عموداً تكون على النظم م×ن

*** بعض المصفوفات الخاصة:**

(١) المصفوفة المربعة: هي مصفوفة عدد صفوفها = عدد أعمدتها

(٢) المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز □

(٣) المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي يكون احدهم على الأقل لا يساوي صفر

(٤) المصفوفة الوحدة I: هي مصفوفة قطرية كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي يساوي واحد

*** مدور المصفوفة ***

إذا كانت م مصفوفة على النظم م×ن واستبدلنا الصفوف بالأعمدة بنفس الترتيب فإن المصفوفة الناتجة تكون على النظم ن×م ويرمز لها بالرمز $م^{مد}$ $\left((م^{مد})^{مد} = م\right)$



* المصفوفة المتماثلة *

اذا كانت م مصفوفة مربعة

$م = م^{مد}$

* المصفوفة شبه المتماثلة *

$م = - م^{مد}$

ملاحظة

المصفوفة شبه المتماثلة يجب ان يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي أصفار

* العمليات على المصفوفات *

(١) ضرب عدد حقيقي لا يساوي الصفر × مصفوفة :
نضرب هذا العدد في كل عنصر من عناصر المصفوفة

(٢) لجمع مصفوفتين يجب ان تكون المصفوفتان على نفس النظم :
نجمع كل عنصر مع نظيره

(٣) لطرح مصفوفتين يجب ان تكون المصفوفتان على نفس النظم ونستخدم القاعدة $م - ب = م + (-ب)$

(٤) لضرب مصفوفتين يجب ان يكون عدد أعمدة المصفوفة الاولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية لكي تكون عملية الضرب معرفة (ممكنة)



* ملاحظات *

١) لأى ثلاث مصفوفات أ ، ب ، جـ على نفس النظم

* أ + ب = ب + أ
* (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)
* أ + □ = أ
* أ + (-أ) = □
* $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

---

٢) لأى ثلاث مصفوفات أ ، ب ، جـ اذا كانت عمليات الضرب معرفة فإن

* أب ≠ ب أ
* (أ ب) جـ = أ (ب جـ)
* أ I = I أ = أ
* أ(ب + جـ) = أب + أجـ ، (ب + جـ) أ = ب أ + جـ أ
* $(أب)^{مد} = ب^{مد} \, أ^{مد}$ وبصفة عامة $(أ ب جـ ,,, هـ)^{مد} = هـ^{مد} ,,, جـ^{مد} \, أ^{مد}$
* |أب| = |أ| × |ب|

المعكوس الضربي للمصفوفة ٢×٢

اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة أ الذى يرمز له بالرمز $أ^{-1}$

يكون معرفاً (موجوداً) عندما يكون (محدد أ) (أى Δ) ≠ ٠ . ويكون

$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{pmatrix}$ حيث $أ أ^{-1} = أ^{-1} أ = I$



*** المصفوفة المنفردة (الشاذة)**
هي المصفوفة التي محددها يساوي صفر وبالتالي يكون لها معكوس ضربي

*** المصفوفة غير المنفردة (غير الشاذة)**
هي المصفوفة التي محددها لا يساوي صفر وبالتالي لا يكون لها معكوس ضربي

المعكوس الضربي للمصفوفة ٣×٣

أولاً يجب التأكد أن Δ (محدد المصفوفة) $\neq$ صفر

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\Delta}$ م ← مصفوفة العوامل المرافقة

العوامل المرافقة: إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{م} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \text{أ}_{12} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$



* المصفوفة الملحقة *

هي مدور مصفوفة العوامل المرافقة ويرمز لها بالرمز م حل

ملحوظة

المصفوفة الملحقة للمصفوفة م ٢×٢ نستنتج من تبديل عنصري القطر الرئيسي مع تغير اشارة كل من عنصري القطر الآخر

---

* بعض خواص المعكوس الضربي للمصفوفة *

اذا كانت م ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن :

(١) $(مب)^{-1} = ب^{-1} م^{-1}$

(٢) $(م^{-1})^{-1} = م$

(٣) $(م^{-1})^{ن} = (م^{ن})^{-1}$

(٤) $(م^{-1})^{2} = (م^{2})^{-1}$

(٥) $(I)^{-1} = I$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربي

المعادلة الخطية : "الصورة العامة للمعادلة الخطية"

$م_1 س_1 + م_2 س_2 + م_3 س_3 + ... + م_ن س_ن = ب$

(حيث $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ......$س_ن$ رموز لمتغيرات عددها ن

$م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ...... $م_ن$ رموز لأعداد حقيقية)

*** المعادلات الخطية المتجانسة**

اذا كان كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت = صفر

*** المعادلة الخطية غير المتجانسة**

اذا كان أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوي صفر



* حل المعادلات الخطية المكونة من متغيرين بالمصفوفات *

اذا كانت المعادلتان هما :

$$ا_1 س + ب_1 ص = جـ_1 \quad ، \quad ا_2 س + ب_2 ص = جـ_2$$

فإن $ا = \begin{pmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} جـ_1 \\ جـ_2 \end{pmatrix}$

حيث $ا س = ب$ ومنها مصفوفة المتغيرات (س)

$$س = ا^{-1} ب$$

← وباستخدام خواص تساوى مصفوفتين نحصل على قيم المجاهيل

---

* رتبة المصفوفة *

رتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر

مع ملاحظة :

اذا كانت ا مصفوفة غير صفرية على النظم م × ن فإنه يرمز لرتبة المصفوفة ا بالرمز ر(ا) ويكون :

1. $1 \leq ر(ا) \leq ن$ اذا كان $م \geq ن$
2. $1 \leq ر(ا) \leq م$ اذا كان $م \leq ن$

خد بالك

لو كانت رتبة المصفوفة ا = ٢ فإن هذا يعنى امرين متحققين :

(١) يوجد محدد او محدد أصغر واحد على الأقل من الدرجة ٢ بحيث قيمته ≠ صفر

(٢) قيم جميع المحددات الصغرى من درجة أكبر من ٢ = صفر



ملاحظات:

(١) اذا كانت أ مصفوفة صفرية فإن ر(أ) = ٠
(٢) اذا كانت أ مصفوفة صف او عمود غير صفرية فإن ر(أ) = ١
(٣) اذا كانت I مصفوفة على النظم ن × ن فإن ر(I) = ن
(٤) مرتبة المصفوفة أ = مرتبة أ^{مد} اى ان ر(أ) = ر(أ^{مد})
(٥) اذا أضيف او حذف صف (عمود) صفرى على المصفوفة أ فإن رتبتها لا تتغير
(٦) اذا أضيف او حذف صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (اعمدة) فإن رتبة المصفوفة لا تتغير

المصفوفة الموسعة: اذا كان لدينا م من المعادلات الخطية من ن من المجاهيل فإنها تكتب على صورة **أ س = ب** ويمكن تعريف المصفوفة الموسعة أ* حيث أ* = (أ : ب) وتكون على النظم م × (ن + ١)

إمكانية حل انظمة المعادلات الخطية

المعادلات غير المتجانسة — "عدد المتغيرات المجاهيل" — المعادلات المتجانسة

المعادلات غير المتجانسة:

(١) له حل وحيد اذا كان
ر(أ) = ر(أ*) = ن

(٢) له عدد غير منته من الحلول
(عدد لا نهائي من الحلول)
اذا كان ر(أ) = ر(أ*) = ك
حيث ك < ن

(٣) ليس له حل على الإطلاق إذا كان
ر(أ) ≠ ر(أ*)

المعادلات المتجانسة:

(١) له حل وحيد
ر(أ) = ر(أ*) = ن
ويسمى بالحل الصفرى

(٢) له عدد لا نهائي من الحلول بجانب الحل الصفرى اذا كان
ر(أ) = ر(أ*) < ن

المحددات

* محدد الدرجة الثانية :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}\,أ_{٢٢} - أ_{١٢}\,أ_{٢١}$$

* محدد الدرجة الثالثة :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$$

يمكن تحديد الإشارة المستخدمة أمام المحدد بطريقة العوامل المرافقة لأى عنصر من المحدد من الشكل الآتى

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ملاحظات :

(١) قيمة المحدد = صفر في ثلاث حالات
- عناصر احد الصفوف او الاعمدة = صفر
- عندما يتطابق صفان او عمودان فيه
- اذا كان احد صفوفه او اعمدته مضاعفاً لصف اخر او عمود اخر

(٢) لا تتغير قيمة المحدد في الحالات الآتية
- عند جعل صفوفه اعمدة او اعمدته صفوف
- عند اضافة عناصر اى صف (او عمود) بعد ضربها في عدد ما إلى العناصر المناظرة لها من صف (او عمود اخر)

(٣) اضرب عدد ك × محدد نضرب ك في كل عنصر من عناصر صف واحد فقط او عمود واحد فقط



(٤) اى عامل مشترك فى صف واحد (او عمود واحد) هو عامل المحدد

(٥) قيمة محدد على الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

المحدد على الصورة المثلثية:

$$\begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{هـ} & \text{د} & \cdot \\ \text{و} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \text{أ} \\ \cdot & \text{ب} & \text{و} \\ \text{حـ} & \text{د} & \text{هـ} \end{vmatrix}$$

تذكر

* $لو_{أ}\, س = لو_{أ^٢}\, س^٢$

* اذا كان أ ب حـ Δ فإن :

من قاعدة الجيب: $\frac{أ}{جا\, أ} = \frac{ب}{جا\, ب} = \frac{حـ}{جا\, حـ} = ٢\, نق$

من قاعدة جيب التمام: $أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢\, ب\, حـ\, جتا\, أ$